

Tatjana Soldatjonoka
Daugavpils Universitāte, Latvija

EŠERA FRAKTĀLO RAKSTU IZVEIDOŠANA GRAFISKAJĀS LIETOTNĒS

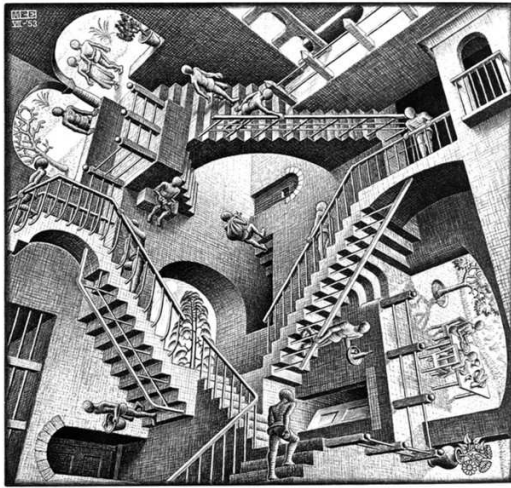
Abstract

Escher's fractal patterns creation in graphic applications

Maurits Cornelis Escher was a Dutch graphic artist known for his often mathematically inspired woodcuts, lithographs and mezzotints which feature impossible constructions, explorations of infinity, architecture, and tessellations. M.C. Escher visualized difficult mathematical concepts: space, the form, fractals, symmetry, and information concepts: self-similarity, a recursion. He is more known as the author of the periodic patterns. Periodic patterns are considered, there are the patterns which parts are created under isometry laws (rotation, translation, reflection and glide reflection) or with Heesch's transformations. The same rules of transformations and creations of patterns what relate to the periodic patterns can also be used to create fractal patterns. A fractal is a rough or fragmented geometric shape that can be subdivided in parts, each of which is a smaller copy of the whole, a property called self-similarity. Escher's fractal images exhibited in London already in 1956, though the term fractal was coined by Mandelbrot in 1975. The work purpose is to classify Escher's fractal patterns on the basis of Heesch's transformations for their construction in graphic applications.

Atslēgas vārdi: Ešera raksti, fraktāļi, izometrija, Hīša pārveidojumi, grafiskās lietotnes

Holandiešu mākslinieks Moriss Kornēlijs Ešers dzimis 1898. gadā Līvārdenē un viņš ir pazīstams ar to, ka radīja unikālus un apburošus darbus, kuros izmantots plašs matemātikas ideju loks. Viņš ir zināms ar savām konceptuālajām litogrāfijām, koka un metāla gravīrām, kurā viņš meistarīgi izpētīja bezgalības un simetrijas jēdzienu plastiskos aspektus, kā arī sarežģīto trīsdimensiju objektu psiholoģiskās ietekmes īpatnības (История людей 2010). Vienā no ceļojumiem uz Itāliju Ešers caurbraucot apmeklēja Spānijas pilsētu Algambru, kur iepazinās ar arābu dekoratīvo mākslu jeb mozaīku (Влад Алексеев 2011). Pēc šā brauciena mākslinieks sāka aktīvi eksperimentēt ar mozaīku attēlu izveidošanu. Ešera darbi īpaši populāri matemātiķu vidū. Interesanti tas, ka patam Ešeram nebija speciālas matemātikas izglītības. Ešers vizualizēja sarežģītus matemātiskus jēdzienus: telpa, forma, fraktāli, simetrija, plaknes saskaldīšana un arī informācijas jēdzienus: pašlīdzība, rekursija. Vairāk viņš ir pazīstams kā periodisko rakstu autors.



Zīm. 1. "Relativity" (8)



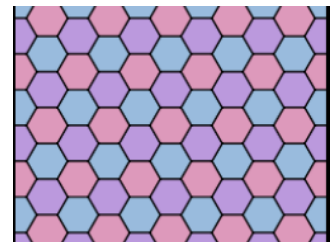
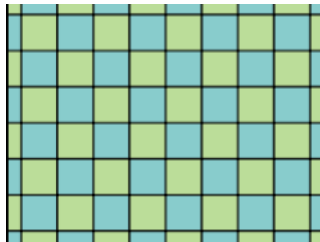
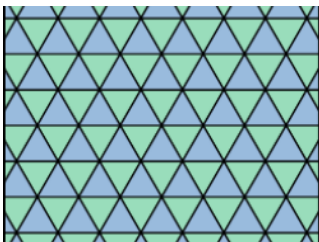
Zīm. 2. "Smaller and Smaller" (8)

Vairākumā Ešera darbos ir klāt plaknes saskaldīšana. Regulāra plaknes saskaldīšanu, ko sauc "mozaīka" - ir noslēgtu figūru salikums, ar kuru palīdzību var aizpildīt plakni bez figūru šķērsojumiem, vien uz otru figūru pārklājumu un spraugu starp tiem (Влад Алексеев 2011). Ešers izmantoja bāziskus mozaīku paraugus, pielietojot tajos Hīša pārveidojumus, un radīja periodiskus rakstus. Tāpat viņš sagrozīja bāziskas figūras, pārvēršot tā dzīvniekos, putnos, ķirzakās un citos.



Zīm. 3. Ešera periodiskie raksti (5)

Regulārais raksts ir periodisks kongruentu regulāro daudzstūru robeža-pie-robežas monohedrālais raksts. Regulāru rakstu izveidošanā par pamatu tiek izmantoti pareizi ģeometriski daudzstūri: trijstūris, kvadrāts un sešstūris. Tāds pamats tiek saukts par topoloģisko režģi.



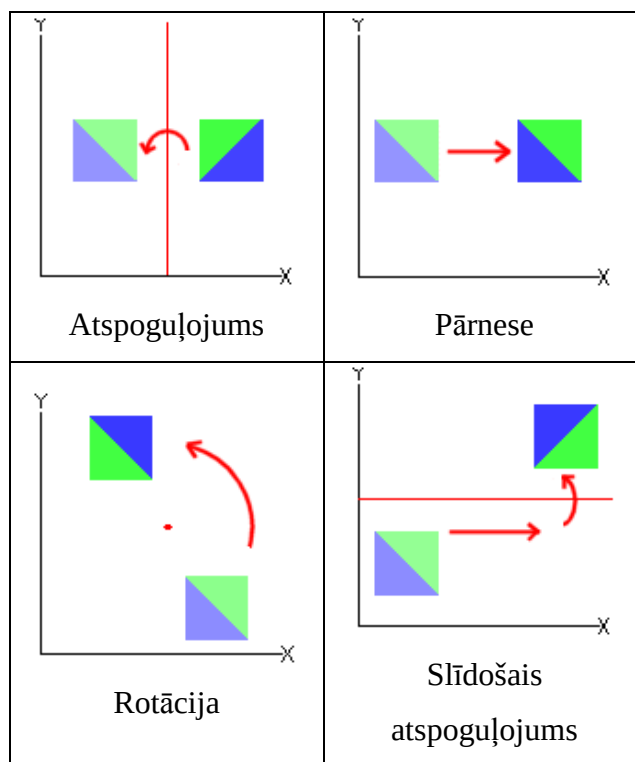
Zīm. 4. Topoloģiskais
režģis- trijstūris

Zīm. 5. Topoloģiskais
režģis- kvadrāts

Zīm. 6. Topoloģiskais
režģis- sešstūris

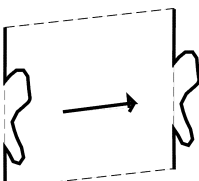
Periodiskais raksts ir raksts, kura daļas izvietotas pēc izometrijas likumiem. Eksistē četri izometrijas veidi plaknē:

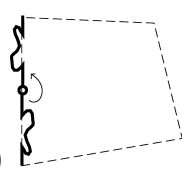
1. atspoguļojums (*Reflection*),
2. pārnese (*Translation*),
3. slīdošais atspoguļojums (*Glide reflection*),
4. rotācija (*Rotation*).



Tabula 1. Četri izometrijas veidi

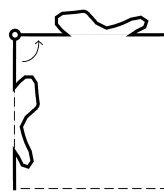
Vācu matemātiķis Henrijs Hīšs, pamatojoties uz izometrijas likumiem, radīja savu pārveidojumu sistēmu. Viņš strādāja ar grupu un mozaīku teoriju. Viņa sistēma sastāv no burtu un ciparu secības, kuri apzīmē konkrētu transformāciju. Hīša sistēmā ir 5 pārveidojumi:

1. T – pārbīde (Translation) 

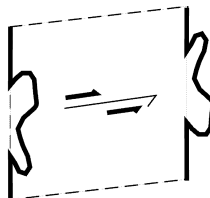
2. C – pagrieziens ap malas viduspunktu (Center point rotation) 

3. C_n – pagrieziens ap figūras virsotni (Corner rotation)

C_3 – pagrieziens par 120° , C_4 – pagrieziens par 90° , C_6 – pagrieziens par 60° ;



4. G – slīdošā simetrija (Glide reflection)

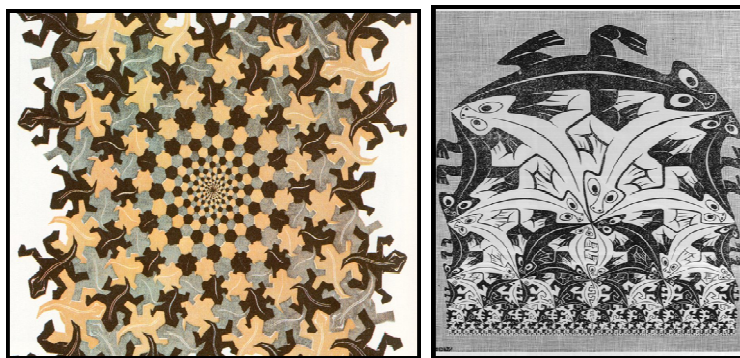


5. G' – kombinētā izometrija (Glide reflection, Adjacent sides)



Vācu matemātiķis Henrijs Hīšs atzīmēja, kas eksistē 28 asimetrisko rakstu daļu veidi, kuri veidoti uz topoloģiskiem režģiem, pielietojot vienu no pieciem pārveidojumiem (Chow 2010). Turpmāk šos 28 veidus nosauca Hīša veidi. Pārveidojumu un rakstu izveidošanu likumi tieši tie paši, kuri skar periodiskos rakstus, tāpat tos var būt izmantot fraktālo rakstu izveidošanai.

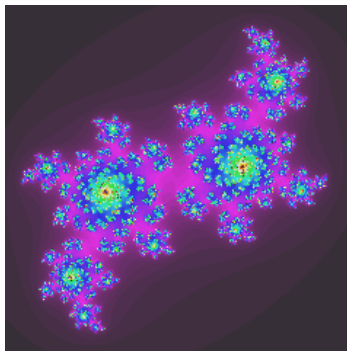
Moriss Ešers ir viens no pirmajiem, kas sāka attēlot savējās mozaīku gleznās fraktāli. Tikai pēc desmitgadēm zinātnieki sāka studēt šo figūru īpašības un ar datora palīdzību izveidot to, ko Ešers zīmēja ar rokām. Fraktāļu rakstu M. K. Ešers demonstrēja izstādē Londonā jau 1956. gadā, kaut gan fraktāļu jēdzienu Benua Moldebrots ieviesa tikai 1975. gadā.



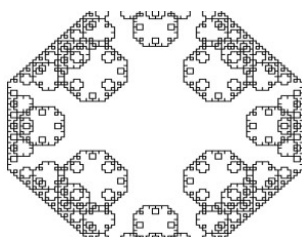
Zīm. 7. Ešera fraktālie raksti (8)

Vārda „fraktālis” nozīme ir: sastāvošs no fragmentiem. Fraktālis ir attēlā ietverta ģeometriskā figūra, kas precīzi saglabā savu apveidu neatkarīgi no tā, kā tiek palielināts vai samazināts pats attēls (Latvijas ZA Terminoloģijas komisija 2010). Viena no galvenām fraktāla īpašībām ir pašlīdzība. Fraktāļi ir gan ar formulas palīdzību veidoti, gan ģeometriskā

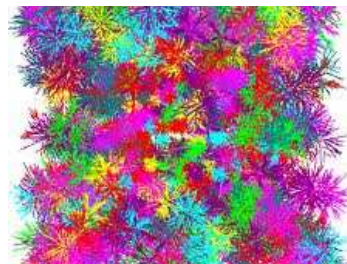
veidā konstruēti. Fraktāļus var sadalīt dažādās grupās. Grupas var būt dažādas, bet viena tām kopīga īpašība ir — to izveidošanā tiek pielietota rekursīvā procedūra iterāciju ģenerācijai. Fraktāļi tiek iedalīti dabiskajos (fiziskie) un modelējamajos (abstraktajos) fraktāļos. Modelējamie fraktāļi iedalās vairākās grupās, no kurām lielākā fraktāļu saturošā grupa ir algebriskie fraktāļi, tad ģeometriskie fraktāļi un stohastiskie (Valaine 2010).



Zīm. 8. Jūlija tīkls (6)



Zīm. 9. Koha līkne (6)

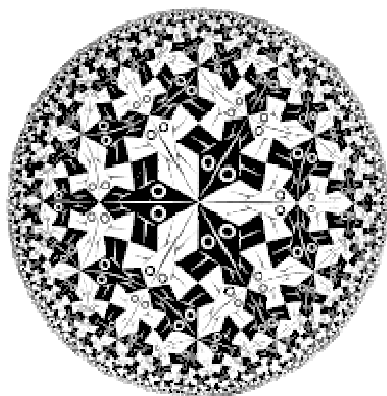


Zīm. 10. Stohastiskais fraktālis(6)

Darba mērķis ir klasificēt Ešera fraktālos rakstus, pamatojoties uz Hīša pārveidojumiem un topoloģiskiem režģiem, lai varētu radīt fraktāļu rakstu izveidošanas algoritmu. Ešera kolekcijā ir daudz darbu, kur ir fraktāļi. Rakstu sadalīšanai grupās tika izvēlēta viena no galvenajām pazīmēm - topoloģiskais režģis, kurā vēlāk pielieto Hīša pārveidojumus. Ešers dažus savus fraktālos darbus apvienoja pats un radītajām grupām deva nosaukumus klasificēšanai, bet pilnu klasificēšanu saviem darbiem nedod, tā kā klasificēšanai ir vajadzīgas savas pazīmes un kritēriji. Pilnīgi klasificēt nozīmē izcelt visus veidus. Kā papildinājums klasificētajiem Ešera darbiem tika apvienotas un nosauktas citas grupas pie viņa darbiem, tālākam kodēšanas pielietojumam pēc noteiktām pazīmēm.

Grupu nosaukums ir dots angļu valodā, tā kā angļu valodā terminoloģija labi iederās. Citās valodās nepieciešams kāds laiks, lai atrastu ekvivalentus šiem terminiem. Ešera fraktālie raksti tiek klasificēti grupās: circle limit, central - spiral similarity, line limit un square limit.

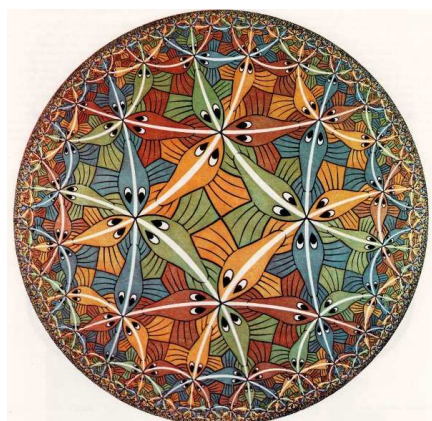
Īpaši svarīgi no matemātikas viedokļa Ešera darbi ir gleznas, kas operē ar pašu telpu. Pirmās grupas klasifikācijas nosaukums - circle limit. Ešers radīja daudzas hiperboliskas telpas ilustrācijas. Un izcēla četrus mozaīku veidus: Circle Limit I, Circle Limit II, Circle Limit III, Circle Limit IV. Īstenībā visas figūras ir vienādas pēc izmēra, bet apļveida robeža ir bezgalīgi tāla no diska centra. Uz hiperboliskas telpas plakanas projekcijas attālinātās zivis saspiežas, lai bezgalīga telpa ietilptu galīgā riņķī (Хуан Малдасена 2010). Visinteresantāk ir tas, kā dotās grupas rakstus izveidot grafiskās lietotnēs. Tādu rakstu izveidošanā tiek pielietots Puankare modelis, kurš tiek aprēķināts ar matemātikas formulām un tas kļūst par topoloģisko režģi rakstā, kurā turpmāk tiek pielietoti Hīša pārveidojumi un veidoti mīklaini raksti.



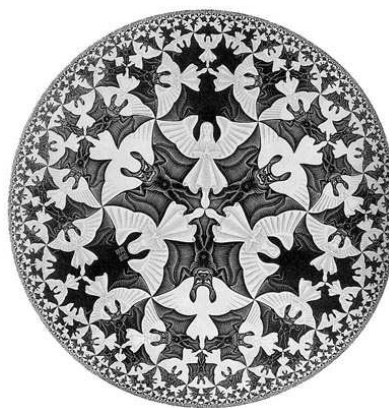
Zīm. 11. Circle Limit I (1)



Zīm. 12. Circle Limit II (1)

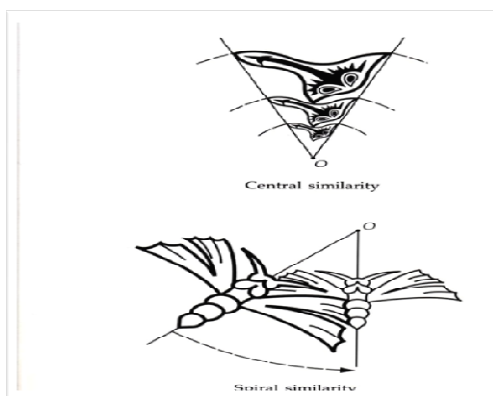


Zīm. 13. Circle Limit III (1)



Zīm. 14. Circle Limit IV (1)

Nākošā klasifikācijas grupa ir central - spiral similarity. Dotai grupai ir tāds nosaukums, jo rakstā visas figūras tiecas uz centru. Ešers savos darbos izmanto divas līdzības transformācijas. Pirmajā ir centra līdzība, visas figūras saspiežas, samazinās izmērā un pārvietojas iekšpusē. Bet otrā ir spirāļu līdzība. Tas sastāv no diviem pārveidojumu soļiem: rotācijas ap centru, uz kaut kādu leņķi un kā pie centrālas līdzības, parauga mērogā samazināšana un pārnese uz centru.



Zīm. 15. Centrālā un spirāle līdzība (2)



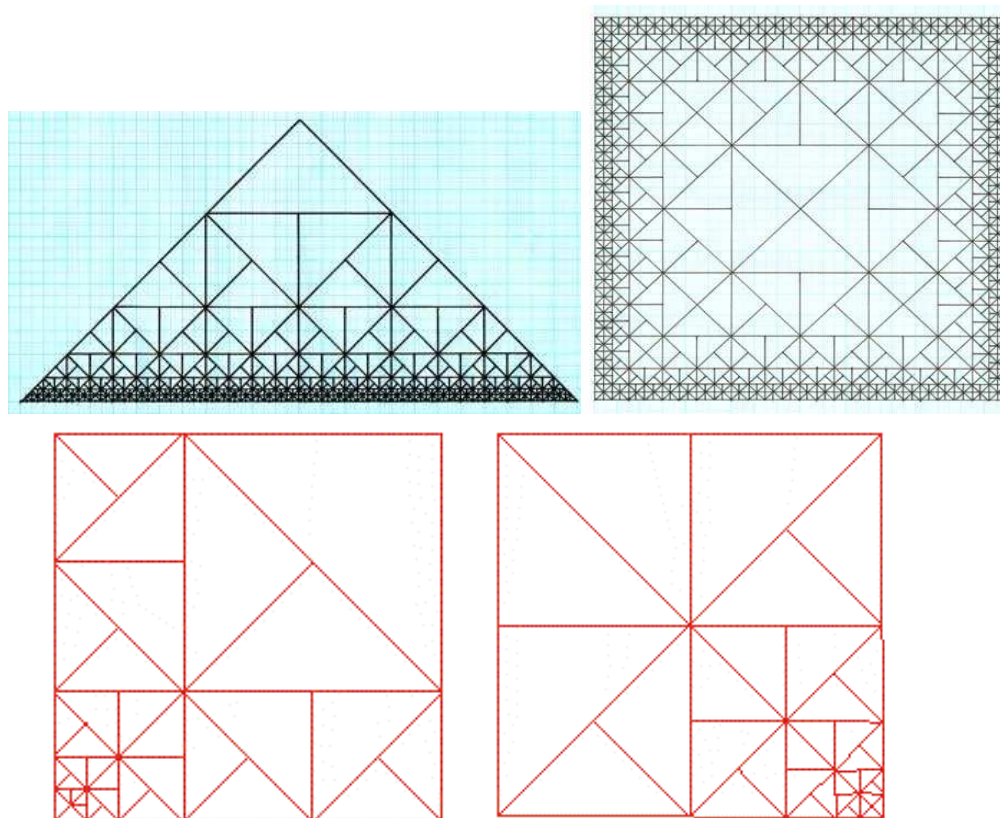
Zīm. 16. „Path of Life I” (2)

Iepazīšanās ar klasificēšanas grupu ar line limit nosaukumu iesākās ar topoloģiska režģa izveidošanu uz Ešera darbiem.



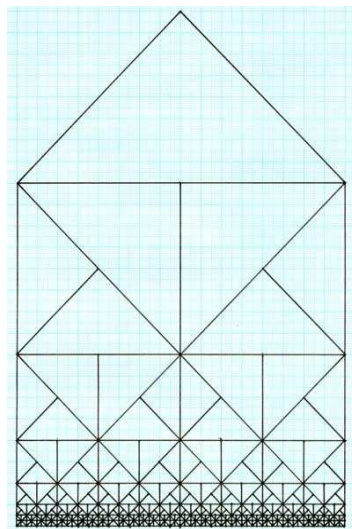
Zīm. 17. Topoloģiskā režģa uz “Smaller and smaller” darbam

Topoloģiska režģa izveidošanas jēga ir tajā, lai apejot vienu bāzisku mozaīkas paraugu, atrastu krustpunktus ar citiem objektiem, lai virsotnē krustotos ne mazāk trīs objekti, un savienot ar līnijām. Nākamais solis tiek izpildīts, tiek ņemts nākamais mozaīkas paraugs un tiek izpildītas visas darbības, kas bija pirmajā solī un tā tālāk. Tā rezultātā mums atspoguļojas topoloģiskais režģis. Tādējādi, line limit grupā bāzisks topoloģiskais režģis sastāv no vienādsānu taisnleņķa trijstūriem. Bet ir iespējami dotās grupas topoloģisko režģu dažādi paveidi, kuros pamatā ir trijstūris.



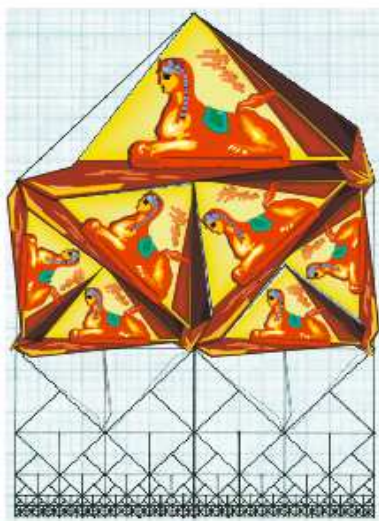
Zīm. 18. Dažādi topoloģisko režģu veidi

Tāpat iespējams radīt topoloģiska režģa paveidu, par pamatu ņemot bāzisku režģi un apgriezt no divām malām režģa daļas un radot paveidu, kā atspoguļots 19 attēlā. Paša fraktālā raksta izveidošanai uz dotās grupas topoloģiska režģa no 28 Hīša veidiem iespējams pielietot tikai 2 Hīša sistēmas veidus: CCC, C1C1C .

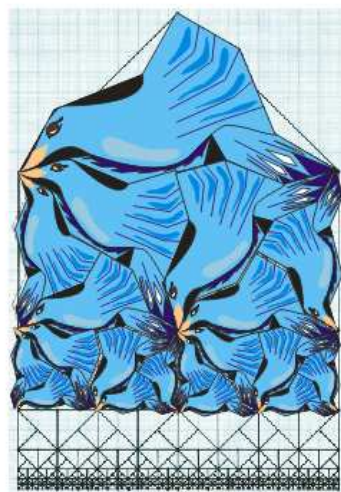


Zīm. 19. Topoloģisku režģu paveids

CC3C3



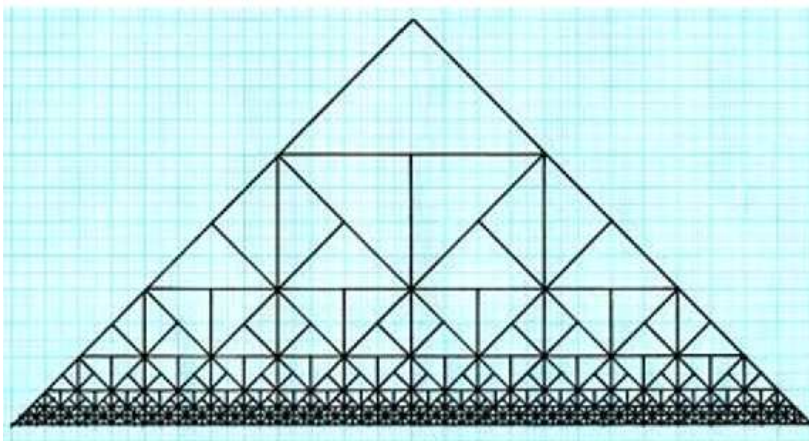
CCC



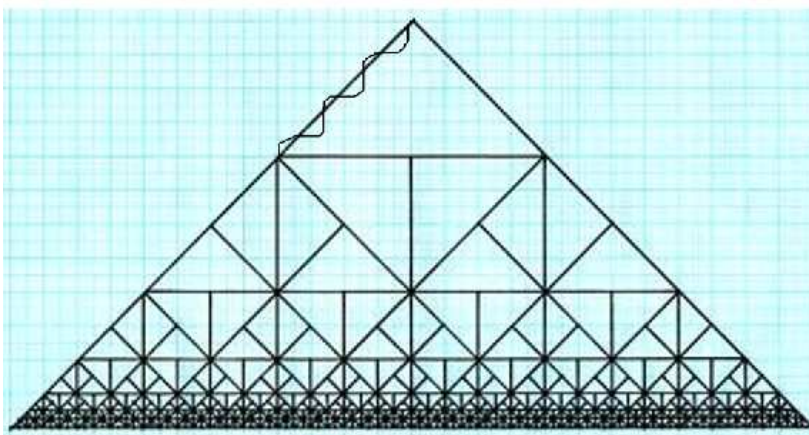
Zīm. 20. Izveidotie fraktālie raksti

Aplūkosim sīkāk fraktālo rakstu izveidošanu grafiskajā lietotnē Photoshop

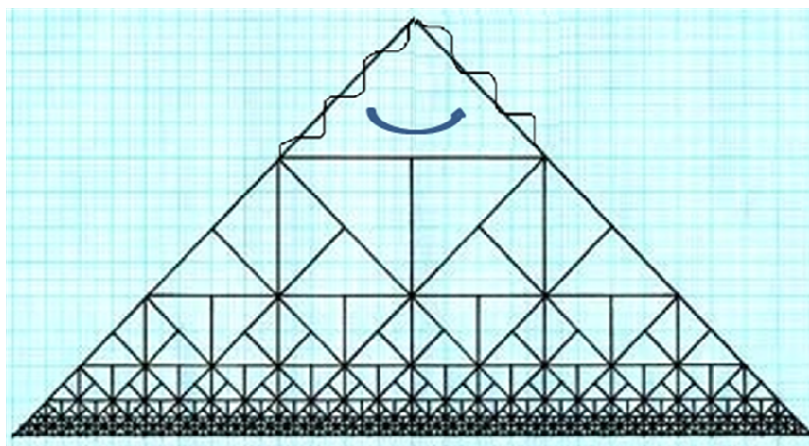
1. Radīsim topoloģisku režģi no vienādsānu taisnleņķa trijstūriem



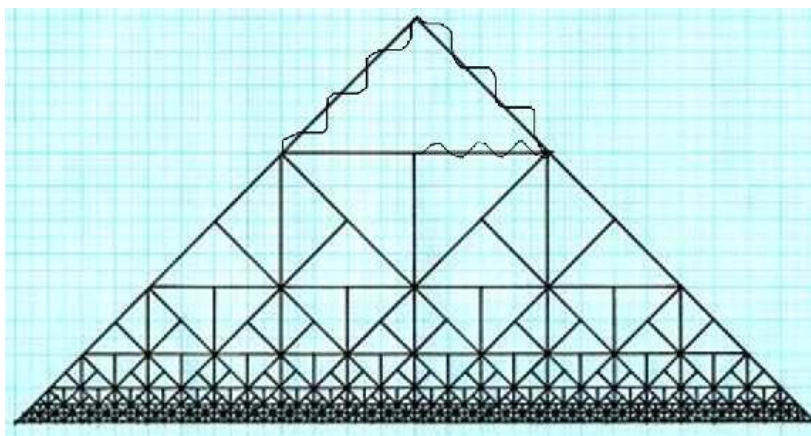
2. Uz vienas malas uzzīmēsim līkni.



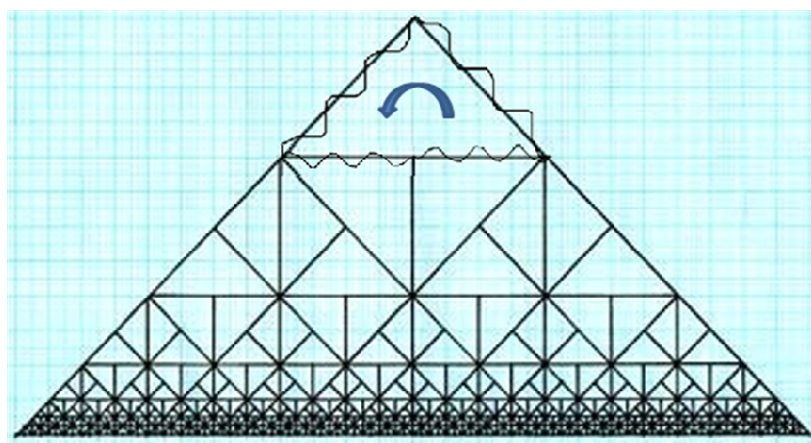
3. Pielietosim vienu no Hīša pārveidojumiem, pagrieziens figūras virsotnē.



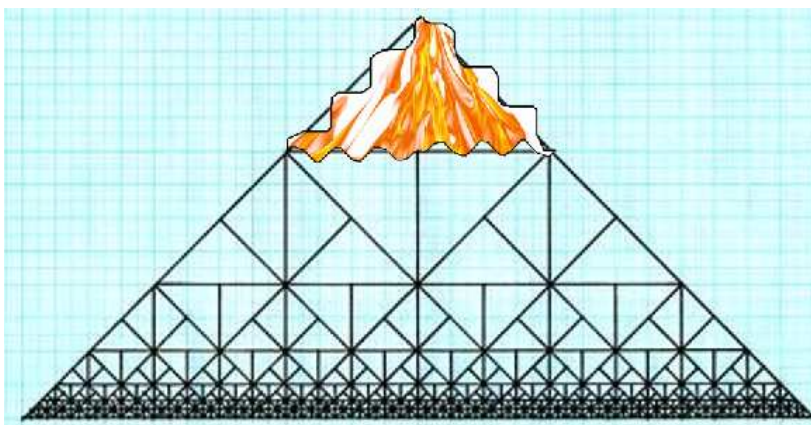
4. Zīmējam līkni uz trīsstūra trešās mala vidus.



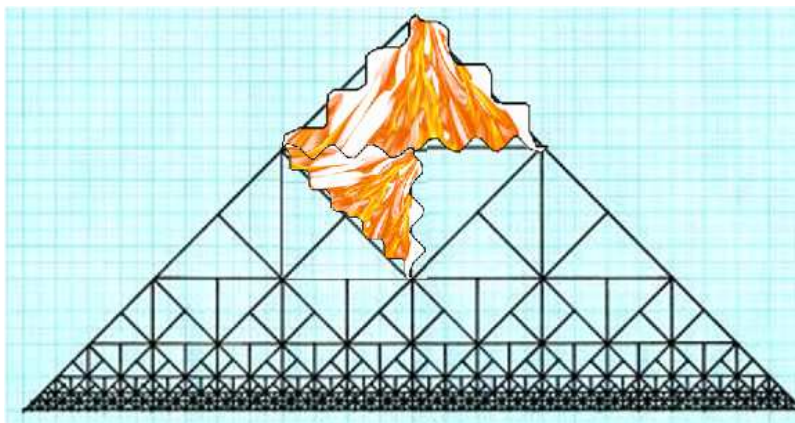
5. Pielietosim Hīša pārveidojumu, pagrieziens malas vidū.



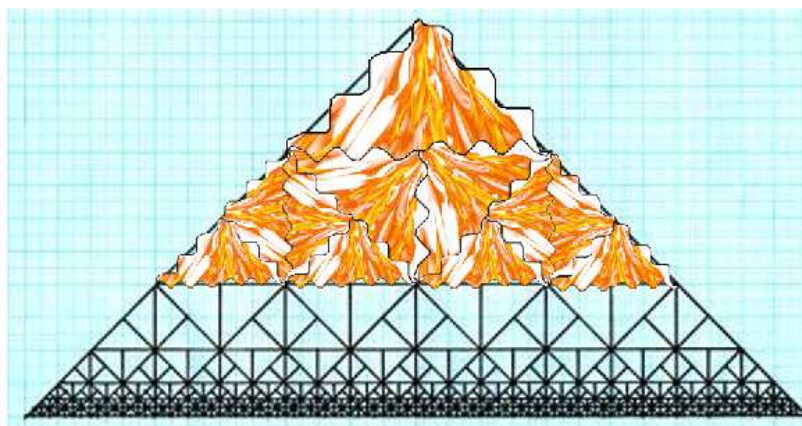
6. Aizkrāsojam sanākušo bāzisko paraugu no uzzīmētajām līknēm.



7. Radām nākamo fraktālītātes līmeni. Samazinām bāze parauga mērogu un pielietojam pagriezienu figūras virsotnē.

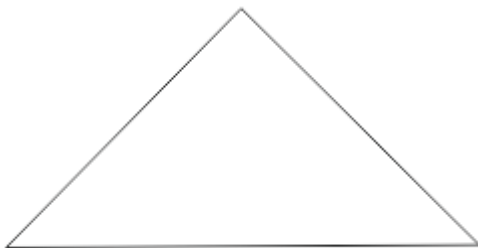


8. Atkārtojam iepriekšējo soli līdz sāk veidoties raksts.

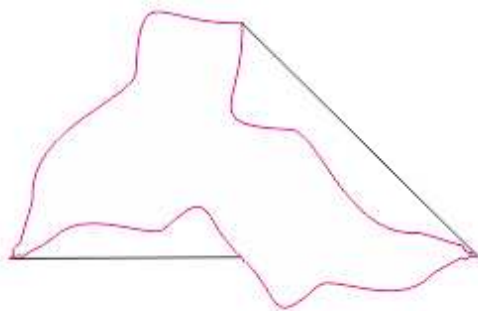


Pēc aprakstītā algoritma var izveidot Ešera fraktālos rakstus arī grafiskā lietotnē Coreldraw.

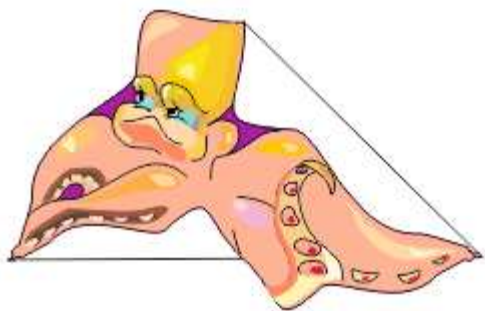
1. Tiek attēlots vienādsānu taisnleņķa trijstūris.



2. Pielietojot Hīša un viņa sistēmu pārveidojumu, tiek izveidots bāzisks raksta paraugs.



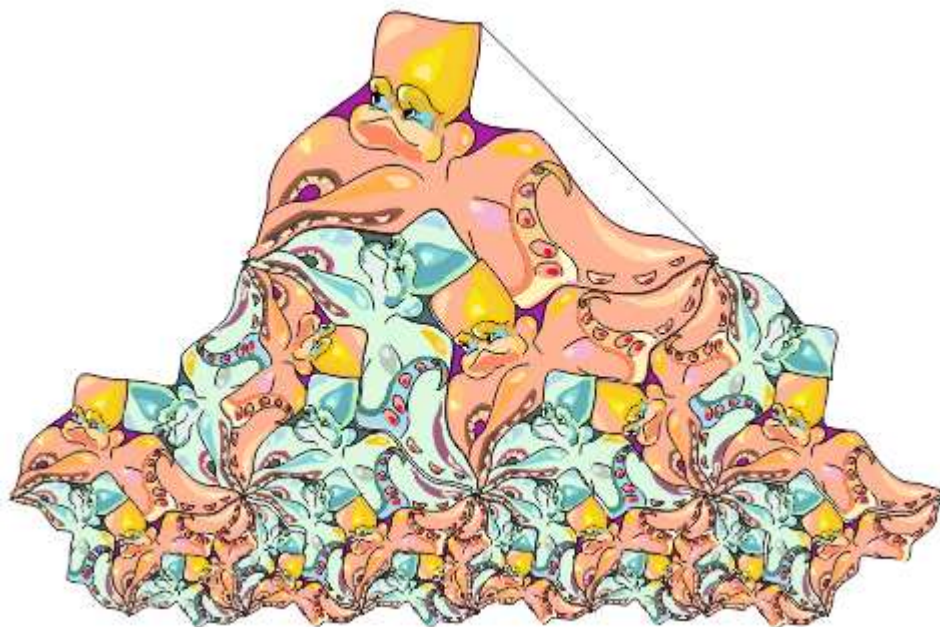
3. Izdomā un izkrāso bāzisku paraugu.



4. Pielietojot samazināšanu un pagriezienu, tiek izveidotas līdzīgi bāziskam paraugam nākamās figūras.

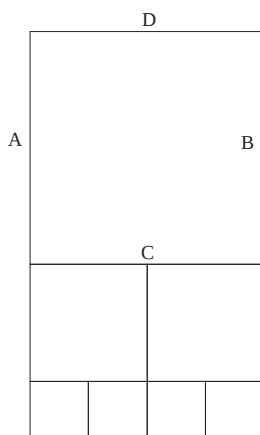


5. Rekursīvi atkārtojot iepriekšējo soli, posmsecīgi tiek izveidots fraktālais raksts.

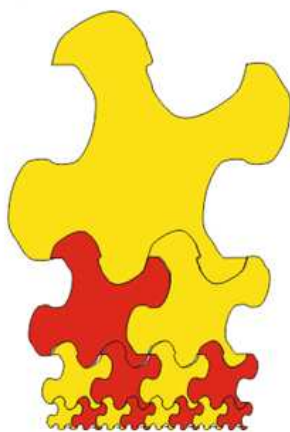


Ešera fraktālo rakstu klasificēšanas noslēdzošā grupa - square limit. Dotās grupas topoloģiskais režģis būvējas uz kvadrātu bāzes. Rakstu izveidošanai tiek pielietotas no 28 Hiša veidiem viņa sistēmas sekojošie veidi: CCCC, TCTC, īpašu uzmanību ir jāpievērš uz TTTT u TGTG sistēmām, tās var pielietot fraktālo rakstu izveidošanā gadījumā, ja divas

paralēlas malas būs taisnes. Tāpat vajag atzīmēt īpatnību pie dotās grupas fraktālo rakstu izveidošanas, mala B vienmēr līdzīga pretējai malai A, bet malas puse C samazināta divas reizes un līdzīga D malai. Square limit grupas fraktālo rakstu izveidošanas algoritms grafiskās lietotnēs ir līdzīgs rakstu izveidošanas algoritmam line limit grupā.



Zīm. 21. Topoloģiskais režģis Zīm. 22. Izveidots raksts grafiskajā lietotnē Photoshop



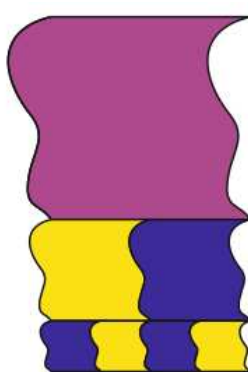
Zīm. 23. Izveidots raksts Hīšā sistēmā CCCC (CorelDraw)



Zīm. 24. Izveidots raksts Hīšā sistēmā TCTC (CorelDraw)



Zīm. 25. Izveidots raksts Hīšā sistēmā TGTG (CorelDraw)



Zīm. 26. Izveidots raksts Hīšā sistēmā TTTT (CorelDraw)

Darba nobeigumā jāatzīmē:

- Tiek klasificēti Ešera darbi, kur novērota pašlīdzība un fraktāli.

- Ešera fraktālos rakstos tiek pildīti noteikumi par topoloģiskā rižģa noteikšanu.
- Ne visus 28 Hiša veidus var piemērot rakstu izveidošanā.
- Ne visi Ešera darbi var būt fraktālie, bet visur tur ir pašlīdzība.
- Nākotnē, balstoties uz analizējamo materiālu un idejām, plānots radīt programmu, lai izveidotu Ešera fraktālos rakstus.

Bibliogrāfija

1. Kjellqvist, E. Classification of tilings in general and M.C. Escher's tilings in particular, 16 p. (www8.cs.umu.se/kurser/TDBD10/VT03/report/esher.doc)
2. Schattschneider, D., Douglas R. Hofstadter. M.C. Escher: Visions of Symmetry. New York, Thames & Hudson, 2004, 354 p.
3. Chow, W. Heesch 28 Interlocking Tiles <http://www.eschertile.com/> [2010.10.20]
4. Dunham Douglas. Transformation of Hyperbolic Escher Patterns <http://vismath.tripod.com/dunham/section6.html> [2010.11.20]
5. Mrs. Rasmussen. Math and Science <http://newellfondamathandscience.blogspot.com/2010/04/mc-escher.html> [2011.04.08]
6. Valaine, Z. E-APMĀCĪBA PAR FRAKTĀLIEM <http://www.politeh.lv/fraktali/10.html> [2010.12.12]
7. Latvijas ZA Terminoloģijas komisija. Lielā termiņu vārdnīca <http://www.termini.lv/index.php?term=frakt%C4%81lis&lang=LV&exact=on> [2010.12.12]
8. Аксёнов Алексей. Рисунки Эшера (Escher) http://basik.ru/painter/escher_maurits_cornelis [2010.11.20]
9. Алексеев Влад. Невозможный мир <http://www.im-possible.info/russian/art/escher/> [2011.03.01]
10. Истории Людей http://www.peoples.ru/art/painter/moris_escher/ [2010.10.20]
11. Малдасена, Хуан. Элементы http://zahav.elementy.ru/lib/430191/430193?page_design=print [2010.11.20]